На правах рукописи

Крепкогорский Всеволод Львович

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ КЛАССОВ БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Казань - 2008

Работа выполнена на кафедре математики Казанского высшего артиллерийского командного училища

Официальные оппоненты :

Доктор физ.-мат. наук, профессор Бережной Евгений Иванович.

Доктор физ.-мат. наук, профессор Нурсултанов Ерлан Даутбекович.

Доктор физ.-мат. наук, профессор Новиков Игорь Яковлевич.

Ведущая организация – Самарский государственный университет.

Защита состоится “_______“_________2009г. в ____ часов на заседании специализированного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: г.Казань, ул.Профессора Нужина 1/37, ауд.324

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского гос. университета.

Автореферат разослан “______“ ___________2008г.

Ученый секретарь
диссертационного совета к.ф.-м.н. Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Обычно для интерполяции в классах пространств Бесова $B^s_{p,q}$ или Лизоркина-Трибеля $F^s_{p,q}$ используются вещественный метод Петре (К-метод) или комплексные методы Кальдерона. В книгах Трибеля[1,2] или Берга и Лёфстрема[3] можно найти 10 - 15 формул для интерполяции пространств $B^s_{p,q}$ и $F^s_{p,q}$ с помощью К-метода Петре. Проверим, насколько они эффективны, на примере пары пространств $\left(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1}\right)$. Пространства B^s_p определяются равенством $B^s_p = B^s_{p,p}$. Используя «классические» интерполяционные формулы мы можем получить описание пространств $\left(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1}\right)_{\theta,q}$ только в следующих частных случаях а) $p_0 = p_1$; б) $q = p_\theta$, где $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Объединим в дальнейшем эти частные случаи в один случай, который будем называть «диагональным». В «диагональном» случае, применив интерполяционный функтор К-метода к паре пространств Бесова, мы снова получим пространство Бесова. На первых порах «диагональный» случай казался вполне достаточным для исследования интерполяционных свойств пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля. Необходимость исследования общего «недиагонального» случая была продемонстрирована в работах В.В.Пеллера[4] и В.В.Пеллера, С.В.Хрущева[5], посвященных пространствам рациональной аппроксимации.

В качестве примера рассмотрим следующий результат В.В.Пеллера.

Пусть T - единичная окружность на комплексной плоскости, $\Re_n$ - множество всех рациональных функций с полюсами вне T, сумма кратностей полюсов которых (включая и полюс в бесконечности) не превосходит n. Пусть $d_n(f, BMO) = \inf\limits_{\varphi\in\Re_n} \left\| f - \varphi \middle| BMO(T) \right\|$ обозначает расстояние от функции $f \in BMO$ до подпространства $\Re_n$. Тогда

$$\{d_n\} \in \ell_p \Leftrightarrow f \in B^{1/p}_p(T).$$

---

[1] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. / Х.Трибель – М.: Мир, 1980.– 664с

[2] Трибель Х. Теория функциональных пространств. / Х.Трибель – М.: Мир, 1986. – 447с.

[3] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства . Введение / Й.Берг, Й.Лефстрем. – М.:Мир,1980. – 264 с.

[4] Пеллер В.В. Описание операторов Ганкеля класса σ_p при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения / В.В.Пеллер// Матем сб. 1983. - Т.122. - №4. - С.481-510.

[5] Пеллер В.В. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы / В.В.Пеллер, С.В.Хрущев // УМН. – Т.37. – №1. – С.53–124.

Так как аппроксимационные свойства сохраняются при интерполяции, то интерполируя пространства рациональной аппроксимации можно получить новые пространства этого типа. Можно надеяться, что помощью интерполяции удастся расширить класс пространств рациональной аппроксимации. Заметим, что при интерполяции пространств $B_p^{1/p}$ в «диагональном» случае мы снова получим пространства этого же типа $\left(B_{p_0}^{1/p_0}, B_{p_1}^{1/p_1}\right)_{\theta,p_\theta} = B_{p_\theta}^{1/p_\theta}$. Это означает, что «диагональный» случай не дал ничего нового по сравнению с исходным результатом. Чтобы расширить класс пространств рациональной аппроксимации с помощью интерполяции нужно рассмотреть именно общий «недиагональный» случай. В.В.Пеллером было получено описание интерполяционных пространств $G_{p_\theta,q}^{1/p_\theta} = (B_{p_0}^{1/p_0}(T), B_{p_1}^{1/p_1}(T))_{\theta,q}$, которые также обладают аппроксимационными свойствами. Таким образом, В.В. Пеллер рассмотрел интерполяцию пространств Бесова в «недиагональном» случае. Дальнейший прогресс возможен в следующих направлениях: а) применить интерполяционные функторы более общего вида, чем $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$; б) получить более простое описание для интерполяционной нормы пространства $G_{p,q}^s$ (в работах В.В.Пеллера эти нормы имеют очень громоздкое описание в терминах потенциалов Грина); в) наконец, можно рассмотреть аппроксимацию по норме не только пространства ВМО. Например, аппроксимацию по нормам H_p изучал А.А.Пекарский[6], а по норме L_∞- А.А.Пекарский[7] и Ю.В.Нетрусов[8].

Другая задача интерполяции, которая возникает при описании пространств рациональной аппроксимации, состоит в получении описания пространств $\left(BMO, B_p^s\right)_{\theta,q}$, $\left(bmo, B_p^s\right)_{\theta,q}$, $\left(L_\infty, B_p^s\right)_{\theta,q}$, $\left(C, B_p^s\right)_{\theta,q}$. Интерполяционные пространства этого типа в диагональном случае изучали А.А.Пекарский[7] и Ю.В.Нетрусов[8].

Если к паре пространств Бесова или Лизоркина-Трибеля применить обычный функтор метода Петре, то в результате мы получим пространств одного из этих типов только в некоторых частных случаях. С другой стороны, как показано в работах И.Асекритовой, Н.Кругляка и др[9]. и

[6] Пекарский А.А. Классы аналитических функций, определенные наилучшими приближениями в H_p / А.А.Пекарский // Матем. сб.–1985.–Т.127.–№1.–С.3–39.

[7] Пекарский А.А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке /А.А.Пекарский // Матем.сб.–1987.–– Т.133. – №1. – С.86–102.

[8] Нетрусов Ю.В. Нелинейная аппроксимация функций из пространств Бесова-Лоренца в равномерной метрике/ Ю.В.Нетрусов // Записки научного семинара ЛОМИ. – 1993. – Т.204.– С.61-81.

[9] Asekritova I. Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications / I.Asekritova, N.Krugljak, L.Maligranda, L. Nikolova, L - E.Persson // Studia Math. – 2001. –V.145.– P.219 – 254.

К.Бекмаганбетова и Е.Нурсултанова[10], по крайней мере, расширенные классы пространств $B^s_{p,q,(r)}$ и $F^s_{p,q,(r)}$ замкнуты относительно функторов многомерных методов. Это позволяет получить интерполяционные теоремы со слабыми условиями вида $T: B^{s_i}_{p_i,1,(1)} \to B^{\tilde{s}_i}_{\tilde{p}_i,\infty,(\infty)}$ вместо условий $T: B^{s_i}_{p_i} \to B^{\tilde{s}_i}_{\tilde{p}_i}$. Такие условия проверяются, однако не для двух пар, а для трех и большего количества пар.

Проще всего интерполировать пространства $B^s_p(U)$ и $F^s_{p,q}(U)$ в случае, когда $U = R_n$ или $U = T$ (единичная окружность на комплексной плоскости). Между тем пространства Бесова возникли как пространства следов в связи с теоремами вложения. Поэтому возникает проблема интерполяции пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля на области. Здесь особенно интересно получить «внутреннее» описание интерполяционных норм, не использующее продолжений функции через границу области. Для «диагонального» случая такое описание получено О.В.Бесовым[11, 12]

Цель работы состоит в том, чтобы реализовать вещественные интерполяционные методы в классах пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля, в общем, в первую очередь «недиагональном» случае;
получить интерполяционные теоремы с участием пространств Бесова, Лизоркина-Трибеля с одной стороны и пространств Гельдера-Зигмунда G_s или $L_p, BMO,\ bmo,\ L_\infty,\ C$; реализовать многомерные интерполяционные методы Спарра и покоординатной интерполяции в классах пространств гладких функций; проинтерполировать пространства Бесова на области, получить внутреннее описание интерполяционных норм; с помощью интерполяции расширить классы пространств рациональной аппроксимации по нормам $BMO,\ H_p, L_\infty$

Общая методика выполнения исследований. Применяются методы теории функций и функционального анализа. Широко используются методы теории интерполяции операторов. Применяется теория банаховых функциональных структур и пространств рациональной аппроксимации.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. В первой главе диссертации впервые были получены интерпо-

---

[10] Bekmaganbetov K.A. Method of multiparameter interpolation and embedding theorems in Besov spaces $B^{\vec{\alpha}}_{\vec{p}}[0, 2\pi)$/ Bekmaganbetov K.A., Nursultanov E.D. // Analysis Math. – 1998. – V.24 – P. 241 – 263.

[11] Бесов О.В. Интерполяция и вложения функциональных пространств $B^s_{p,q}$, $F^s_{p,q}$ на области // Докл. РАН. – 1997.– Т. 357.– №.–6.

[12] Бесов О.В. Интерполяция пространств дифференцируемых функций на области / .В.Бесов // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова.– 1997.– Т.214.– С.59 – 82.

ляционные теоремы, описывающие пространства $\left(B_{p_0}^{s_0}, B_{p_1}^{s_1}\right)_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}$ в «недиагональном» случае. Для частного случая интерполяции пространств $\left(B_{p_0}^{1/p_0}(T), B_{p_1}^{1/p_1}(T)\right)_{\theta,q}$ аналогичный результат был получен В.В.Пеллером. В дальнейшем эти исследования были продолжены Бокингом[13], который исследовал пространства $\left(B_{p_0,q_0}^{s_0}(R_n), B_{p_1,q_1}^{s_1}(R_n)\right)_{\theta,q}$. При этом он отметил, что в частном случае, когда $q_i = p_i,\ i = 0,1$ его результаты совпадают с моими.

Во второй главе диссертации впервые получены интерполяционные теоремы для общего случая с участием пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля с одной стороны и пространств Гельдера-Зигмунда G_s или пространств bmo, C, L_∞ с другой стороны.

В третьей главе диссертации метод Спарра был реализован в классе пространств Лизоркина-Трибеля при этом была доказана интерполяционная теорема, использующая слабые условия вида $T : F_{p_i,1,(1)}^{s_i} \to F_{\tilde{p}_i,\infty,(\infty)}^{\tilde{s}_i}$. Близкий результат был получен в статье И.Асекритовой, Н.Кругляка[9] и др. опубликованной одновременно с соответствующей статьей автора.

В четвертой главе диссертации впервые были получены описания интерполяционных норм на области для «недиагонального» случая. При этом были использованы конструкции норм предложенные О.В.Бесовым[14] и Освальдом[15] для исходных пространств $B_p^s(G)$ или для пространств полученных с помощью интерполяции в «диагональном» случае.

В пятой главе основываясь на результатах В.В.Пеллера[4], С.В.Хрущева[5], А.А.Пекарского[6,7] и Ю.В.Нетрусова[8] с помощью интерполяции в «недиагональном» случае получены более широкие классы пространств рациональной аппроксимации, чем в перечисленных работах.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и продолжает исследование интерполяции в указанных в заголовке классах пространств. Полученные в диссертации результаты могут быть применены в теории аппроксимации, в теоремах вложения, теории дифференциальных операторов и дифференциальных уравнений.

---

[13] Bőcking J. Night-diagonale Interpolation von klassische Funktionenräumen/ J.Bőcking // Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 1994.– 269p.

[14] Бесов О.В. Интерполяция пространств дифференцируемых функций на области / О.В.Бесов // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова.– 1997.– Т.214.– С.59 – 82.

[15] Oswald P. On Besov-Hardy-Sobolev spaces of analytic function in the unit disc / P.Oswald // Czechoslovak. Mathem. J.– 1983.– V.33 (108).– 3.– P. 408 – 426.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре в МГУ под руководством действительного члена РАН профессора П.Л.Ульянова и члена-корреспондента РАН профессора Б.С.Кашина; на семинаре МИРАН под руководством действительного члена РАН С.М.Никольского; на семинаре ЛОМИ под руководством профессора В.В.Пеллера; на семинарах в Самарском и Воронежском университете, на семинаре в Институте математики и механики Уральского отделения РАН, на шести международных конференциях, в том числе на международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ» посвящений столетию С.М. Никольского (Москва 23 мая – 28 мая 2005г.)

Публикации. Основные работы автора изложены в работах автора [1-20]. Совместных работ нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения и пяти глав, разделенных на 29 параграфа. Диссертация занимает 263 страницы компьютерного набора. Библиография содержит 148 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена интерполяции пространств Бесова $B_p^s(R_n)$ и Лизоркина-Трибеля $F_{p,q}^s(R_n)$. Содержание главы изложено в статьях автора [2], [4], [6]. В первом параграфе даны основные определения и обозначения (см.[1,2]).

Назовем квазибанаховой (банаховой) структурой квазибанохово (банахово) пространство измеримых функций E, квазинорма (норма) которого обладает свойством монотонности: если $f(x)$ и $g(x)$ - измеримые функции, $|f(x)| \leq |g(x)|$ почти всюду и $g(x) \in E$, то $f(x) \in E$ и $\|f|E\| \leq \|g|E\|$.

Пусть даны две квазинормированные структуры $E(X)$ и $G(Y)$, а также функция двух переменных $f(x,y), x \in X, y \in Y$. Смешанной квазинормой (нормой) назовем функционал $\|f|G[E]\|$ $= \left\| \|f(x,y)|E(X)\| \, |G(Y) \right\|$. Обозначим через $G[E]$ пространство со смешанной квазинормой (нормой).

Пару банаховых (квазибанаховых) пространств (A_0, A_1) вложенных непрерывно в некоторое хаусдорфово ТВП $\mathcal{A}$ будем называть совместимой парой.

Для совместимой пары можно определить К-функционал Петре:

$$K(t, a, A_0, A_1) = \inf_{a_0 + a_1 = a} \left(\|a_0|A_0\| + t\|a_1|A_1\| \right).$$

Для функций $g(t)$ заданных на множестве $(0,\infty)$ рассмотрим семейство квазинорм

$$\Phi_{\theta,q}(g):=\left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}g(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \quad 0<\theta<1, 0<q<\infty$$

и при $q=\infty$

$$\Phi_{\theta,\infty}(g):=\sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}g(t).$$

Для совместимой пары банаховых (квазибанаховых) пространств (A_0,A_1) определим пространство

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}:=\left\{a\in A_0+A_1 : \left\|a\left|(A_0,A_1)_{\theta,q}\right.\right\|:=\Phi_{\theta,q}\left(K\left(t,a,A_0,A_1\right)\right)<\infty\right\}.$$

Интерполяционное свойство. Рассмотрим две совместимые пары (A_0,A_1) и (B_0,B_1). Пусть линейный оператор $T: A_i\to B_i$ с нормами $M_i=\left\|T\left|A_i\to B_i\right.\right\|$, $i=0,1$. Тогда оператор $T:(A_0,A_1)_{\theta,q}\to(B_0,B_1)_{\theta,q}$ с нормой $\left\|T\left|(A_0,A_1)_{\theta,q}\to(B_0,B_1)_{\theta,q}\right.\right\|\le M_0^{1-\theta}\cdot M_1^{\theta}$.

Пространством Лоренца $L_{p,q}(U,\omega,\mu)$ *с весом* ω *и мерой* μ при $0<p<\infty, 0<q\le\infty$ назовем квазинормированную (банахову) структуру с квазинормой

$$\left\|f\left|L_{p,q}(\omega,\mu)\right.\right\|=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}(f\cdot\omega)^*_\mu(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} \quad q<\infty$$

и

$$\left\|f\left|L_{p,\infty}(\omega,\mu)\right.\right\|=\sup_t\left(t^{1/p}(f\cdot\omega)^*_\mu(t)\right).$$

Здесь знак $(g)^*_\mu$ означает невозрастающую перестановку равноизмеримую с $g(x)$ относительно меры μ.

Обозначим через $\Phi(R_n)$ совокупность всех систем $\varphi=\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=0}^\infty\subset S(R_n)$, таких что

$$\operatorname{supp}\varphi_0\subset\left\{x:\ |x|\le 2\right\},$$

$$\operatorname{supp}\varphi_j\subset\left\{x:\ 2^{j-1}\le|x|\le 2^{j+1}\right\}, j=1,2,3,...$$

для каждого мультииндекса α существует положительное число c_α, при котором $2^{j|\alpha|}\left|D^\alpha\varphi_j(x)\right|\le c_\alpha$ для всех $j=0,1,2,...$и всех $x\in R_n$ и

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)=1 \quad x\in R_n.$$

Пространства Бесова $B^s_{p,q}$ и Лизоркина-Трибеля $F^s_{p,q}$.

Пусть $-\infty<s<\infty, 0<q\le\infty$ и $\varphi=\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}\in\Phi(R_n)$.

(i) Если $0<p\le\infty$, то

$$B^s_{p,q}(R_n)=$$
$$=\left\{f\,\middle|\,f\in S'(R_n),\left\|f\,\middle|B^s_{p,q}(R_n)\right\|=\left\|2^{js}\Im^{-1}\varphi_j\Im f\,\middle|\ell_q\left[L_p(R_n)\right]\right\|<\infty\right\}.$$

(ii) Если $0<p<\infty$, то

$$F^s_{p,q}(R_n)=$$
$$=\left\{f\,\middle|\,f\in S'(R_n),\left\|f\,\middle|F^s_{p,q}(R_n)\right\|=\left\|2^{js}\Im^{-1}\varphi_j\Im f\,\middle|L_p(R_n)\left[\ell_q\right]\right\|<\infty\right\}.$$

Здесь $\Im$ - оператор Фурье.

Пространства $L^{s,k}_{p,q}$ получаются при интерполяции пары пространств L_p с весом, а пространства $BL^{s,k}_{p,q}$ - при интерполяции пар пространств Бесова B^s_p.

Пространства $L^{s,k}_{p,q}$. Пусть $-\infty<s,k<\infty,\ 0<p<\infty$, $0<q\le\infty$. Рассмотрим пространство Лоренца, состоящее из последовательностей функций $f(x,j)=f_j(x), x\in R_n,\ j=0,1,2,\ldots$. Положим

$$L^{s,k}_{p,q}:=L_{p,q}(R_n\times Z_+,2^{j(s-k/p)},2^{jk}\nu\times m_n).$$

Пространства $BL^{s,k}_{p,q}$. Пусть $-\infty<s,k<\infty, 0<p<\infty$, $0<q\le\infty$. Тогда

$$BL^{s,k}_{p,q}:=\left\{f\,\middle|\,f\in S',\left\|f\,\middle|BL^{s,k}_{p,q}\right\|=\left\|\Im^{-1}\varphi_j\Im f\,\middle|L^{s,k}_{p,q}\right\|<\infty\right\}.$$

Пусть A и B - два банаховых пространства. Оператор $R\in\mathcal{L}(A,B)$ называется **ретракцией** , если существует оператор $S\in\mathcal{L}(B,A)$ такой, что $RS=I$ (тождественный оператор из $\mathcal{L}(B,B)$). При этом оператор S называется **коретракцией**. Пространство B называется **ретрактом** пространства A.

В параграфе 2 рассматривается интерполяция в классе пространств L_p с весом и в классе банаховых пространств Бесова $B_p^s(R_n)$. При этом получены следующие результаты.

Теорема 1.2.2. *Пусть* k *и* b*- коэффициенты из уравнения прямой* $s = kx + b$*, проходящей через точки* $(1/p_i, s_i), i = 0,1$. *Положим* $-\infty < s_i < \infty, 0 < p_i < \infty, 0 < \theta < 1, 0 < q \le \infty$*,* $s_\theta := s_0(1-\theta) + s_1\theta$ *и* $p = p_\theta$*,* $1/p_\theta := (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. *Тогда*

$$(\ell_{p_0}^{s_0}[L_{p_0}], \ell_{p_1}^{s_1}[L_{p_1}])_{\theta,q} = L_{p_\theta,q}^{s_\theta,k}.$$

Здесь $\ell_p^s := \ell_p^s(Z_+, 2^{js}, \nu)$*- пространство* ℓ_p *с весом* 2^{js}.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$*,* $0 < \theta < 1$*,* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$*,* $1 < p_0, p_1 < \infty$*,* $p_0 \ne p_1$*,* $0 < q \le \infty$. *Если* $s = s_\theta$ *и* $p = p_\theta$*, то*

$$\left(B_{p_0}^{s_0}(R_n), B_{p_1}^{s_1}(R_n)\right)_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}.$$

В параграфе 1.3 изучается интерполяция в классе квазинормированных пространств Бесова. При этом доказана теорема 1.3.2, которая отличается от теоремы 1.2.3 только тем, что условие $1 < p_0, p_1 < \infty$ заменено на $0 < p_0, p_1 < \infty$. Однако доказательство этой теоремы для квазинормированного случая существенно сложней чем 1.2.3.

В четвертом параграфе исследуются свойства интерполяционных пространств $BL_{p,q}^{s,k}$. В частности, доказана теорема.

Теорема 1.4.1. *При* $1 \le q < \infty, 1 < p < \infty, -\infty < s < \infty$, $-\infty < k < \infty$*,* $1/q + 1/q' = 1$*,* $1/p + 1/p' = 1$ *справедливы равенства*

$$\left(BL_{p,q}^{s,k}\right)' = BL_{p',q'}^{-s,k};\ \left(L_{p,q}^{s,k}\right)' = L_{p',q'}^{-s,k} \text{ и } \left(L_{p,\infty}^{s,k}\right)^1 = L_{p',1}^{-s,k}.$$

Здесь через E^1 *обозначено ассоциированное с банаховой структурой* E *пространство.*

В параграфе 1.5 получены интерполяционные теоремы для пространств Лизоркина-Трибеля. Сначала доказаны вложения.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $1 < p < \infty, 1 \le q \le \infty, -\infty < k < \infty, k \ne 0$, $-\infty < s < \infty$. *Тогда*

$$BL_{p,1}^{s,k} \subset F_{p,q}^s \subset BL_{p,\infty}^{s,k}.$$

С помощью теоремы о реитерации отсюда получаем

Теорема 1.5.2. *Пусть* $1 < p_i < \infty, 1 \le q_i \le \infty, p_0 \ne p_1, s_0 \ne s_1,$ $-\infty < s_i < \infty$, $i = 0,1$; $0 < \theta < 1$ *и* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1,$ $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $k = \dfrac{s_1 - s_0}{1/p_1 - 1/p_0}$. *Тогда*

$$(F^{s_0}_{p_0,q_0}, F^{s_1}_{p_1,q_1})_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}.$$

В параграфе 1.6 рассматриваются вложения как между пространствами различных типов на R_n, так и вложения между пространствами следов.

Представим пространство R_n как декартово произведение $R_n = R_{n-1} \times R_1$, $x \in R_n \Rightarrow x = \{x', x_n\}$, $x' = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$. В этом случае для функций из пространства $B^s_p(R_n)$ имеют смысл следы $f(x',0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x',0), \ldots, \dfrac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x',0)$ при условии, что $s > r + (1/p)\cdot\max(0,(n-1)(1/p-1))$. Определим на пространстве $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ оператор

$$\Re f = \left\{ f(x',0), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',0), \ldots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x',0) \right\}.$$

Теорема 1.6.2. *Если* $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ *и*

$$s > r + (1/p)\cdot\max(0,(n-1)(1/p-1)),$$

то $\Re$ *- ретракция, отображающая пространство* $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ *на* $\prod_{j=0}^{r} BL^{s-1/p-j,\,k-1}_{p,q}(R_{n-1})$.

В шестом параграфе обсуждается следующая проблема. Теорема 1.5.2 утверждает, что при интерполяции пространств Лизоркина-Трибеля $(F^{s_0}_{p_0,q_0}, F^{s_1}_{p_1,q_1})_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}$ результат совершенно не зависит от «первоначальных» значений параметров q_0, q_1 лишь бы они принадлежали множеству $[1,\infty]$. Возникает вопрос нельзя ли в этом равенстве заменить пространства Лизоркина-Трибеля $F^s_{p,q}$ на пространства Бесова $B^s_{p,q}$?

Ответ на этот вопрос отрицательный, так как получен контрпример, показывающий, что, вообще говоря, пространства $(B^{s_0}_{p_0,1}, B^{s_1}_{p_1,1})_{\theta,q}$ и $(B^{s_0}_{p_0,\infty}, B^{s_1}_{p_1,\infty})_{\theta,q}$ различны.

Замечание. В своей диссертации Бокинг[13] со ссылкой на автора диссертации формулирует теорему 1.2.3. Затем он описывает пространства $BL^{s,k_s,k_p}_{p,q,(r)} = (B^{s_0}_{p_0,q_0}, B^{s_1}_{p_1,q_1})_{\theta,r}$. Здесь k_s - угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i, s_i)$ и k_p- угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i, 1/q_i)$. В данном примере показано, что, вообще говоря $BL^{s,k_s,0}_{p,1,(r)} \neq BL^{s,k_s,0}_{p,\infty,(r)}$.

Хорошо известная формула интерполяции

$$\left(B^{s_0}_{p_0}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n)\right)_{\theta,p_\theta} = B^{s_\theta}_{p_\theta}(R_n),$$

где $s_\theta = s_0(1-\theta) + s_1\theta$ и $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, соответствующая «диагональному» случаю, основана на простом факте: $BL^{s,k}_{p,p} = B^s_p$ независимо от значения k. Возникает вопрос: не совпадают ли пространства $BL^{s,k_1}_{p,q}$ и $BL^{s,k_2}_{p,q}$, при $k_1 \neq k_2$ в общем случае? К сожалению, точный ответ на этот вопрос мне неизвестен. Приведен пример, показывающий, что, по крайней мере, пространства $L^{s,k_1}_{p,q}$ и $L^{s,k_2}_{p,q}$, могут быть различны при $k_1 \neq k_2$.

В главе 2 рассматривается интерполяция с участием пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля с параметром $p = \infty$. Содержание главы изложено в статьях автора [9], [10]. Известно[2], что пространства Бесова B^s_∞ совпадают с пространствами Гельдера-Зигмунда G^s, пространство $F^0_{\infty,2}(R_n)$ совпадает с пространством $bmo(R_n)$, (однородные пространства $\dot{F}^0_{\infty,2}(R_n)$ совпадают с $BMO(R_n)$). Наконец, пространства L_∞, судя по всему, не совпадают ни с одним из пространств Бесова или Лизоркина-Трибеля, однако в интерполяционных формулах это пространство ведет как пространство класса F с параметрами $s = 0$ и $p = \infty$.

Во второй главе доказаны интерполяционные теоремы с участием пространств bmo, Гельдера G^s, L_p и L_∞.

Теорема 2.2.2/1. *Пусть а)* $s_0 > 0, s_0 \neq s_1, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, 1/p = \theta/p_1$, $k = p_1(s_1 - s_0)$, *тогда*

$$(G^{s_0}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n),$$

б) при дополнительных условиях $1 \leq p_1 < \infty, 1 \leq q_1 \leq \infty$, *справедливо равенство*

$$(G^{s_0}(R_n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n).$$

Ю.В.Нетрусов[16] получил интерполяционную теорему для пространств $B^s_{p,q,(r)}(R_n)$ и $L_\infty(R_n)$ в «диагональном» случае.

[16] Нетрусов Ю.В. Интерполяция (вещественный метод) пространств гладких функций с пространством ограниченных функций. / Ю.В.Нетрусов // Докл. РАН. – 1992. – т.325. – №6. – С.1120 – 1123.

А.А.Пекарский[7] доказал следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* U - *единичная окружность на комплексной плоскости или отрезок* $[-1,1]$ *и* $0<\theta<1,\ 1/p=(1-\theta)/p_0>1$. *Тогда* $(B_{p_0}^{1/p_0}(U),C(U))_{\theta,p}=B_p^{1/p}(U)$.

В главе 2 доказаны два близких утверждения для «недиагонального» случая.

Теорема 2.2.3/2. *Пусть* $0<p_1,p_2<1,\,0<q\le\infty,0<\theta<1$, $1/p=\theta/p_1$. *Тогда* $(C(T),B_{p_1}^{1/p_1}(T))_{\theta,q}=BL_{p,q}^{1/p,1}(T)$.

Теорема 2.2.3/3. *Пусть* $n/p-n<s_0,s<\infty$, $sp\le n$, $0<p<1$, $0<q\le\infty$, $0<\theta<1$, $s=(1-\theta)s_0$, $1/p=(1-\theta)/p_0$, *тогда*

$$(B_{p_0}^{s_0}(R_n),L_\infty(R_n))_{\theta,q}=BL_{p,q}^{s,q}.$$

В главе 3 изучается действие многомерных интерполяционных функторов в классах пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля. Содержание главы изложено в статьях автора [7], [12], [14]. Многомерные интерполяционные методы Спарра, Фернандеса являются аналогами обычного «одномерного» метода Петре. Функторы этих методов действуют не на пары «исходных» пространств, а на наборы из n или 2^n пространств. Классы пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля оказываются замкнутыми относительно этих функторов. Кроме того, рассматривается многомерный метод, функторы которого составлены из одномерных функторов Петре. Этот метод можно назвать методом «покоординатной» интерполяции. Реализация многомерных методов в конкретных классах функциональных пространств, встречает большие трудности. Так единственный пример реализации метода Фернандеса в классе пространств со смешанной нормой оказался неточен. Соответствующие контрпримеры были приведены рядом авторов. Например[17].

На четверке пространств $A_{i,k},i=0,1;k=0,1$ определим многомерный функтор

$$\Im_{\Theta,Q}((A_{i,k})_{i=0,1})_{k=0,1}:=((A_{0,0},A_{1,0})_{\theta_1,q_1},(A_{0,1},A_{1,1})_{\theta_1,q_1})_{\theta_2,q_2},$$
$$\Theta=(\theta_1,\theta_2),Q=(q_1,q_2),0<\theta_1,\theta_2<1,1\le q_1,q_2\le\infty.$$

Рассматривается расширенный класс пространств Бесова $B_{p,q,(r)}^s$ с нормой $\left\|f\left|B_{p,q,(r)}^s\right.\right\|=\left\|f*\varphi_j\left|\ell_q^s[L_{p,r}]\right.\right\|$.

Доказаны интерполяционные теоремы со слабыми условиями типа $T:B_{p,1,(1)}^s\to B_{\tilde p,\infty,(\infty)}^{\tilde s}$. Показано, что такие условия слабее чем условия вида

[17] Крепкогорский В.Л. Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой / В.Л. Крепкогорский // Деп. в ВИНИТИ 30.06.1980. – №2963 – 80Деп.

$$T: F^{s}_{p,1} \to F^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\infty}, T: B^{s}_{p,1} \to B^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\infty}, T: BL^{s}_{p,1} \to BL^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\infty}.$$

Пусть преобразование $V(x,y): R_2 \to R_2$ определено формулой

$$V(x,y) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2, h_1, h_2 \in R_1.$$

Теорема 3.1.2/3. *Пусть* $\Theta = (\theta_1, \theta_2), Q = (q_1, q_2), 0 < \theta_1, \theta_2 < 1,$ $1 \le q_1, q_2 \le \infty, V(1/p_i, s_i) = (1/\tilde{p}_i, \tilde{s}_i), V(1/p, s) = (1/\tilde{p}, \tilde{s}),$ $1 < p_i, \tilde{p}_i < \infty, -\infty < s_j, \tilde{s}_j < \infty, i = 0,1, j = 0,1;$ $s = (1-\theta_2)s_0 + \theta_2 s_1$ $1/p = (1-\theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1,$. *Тогда если*

$$T: B^{s_j}_{p_i,1,(1)} \to B^{\tilde{s}_j}_{\tilde{p}_i,\infty,(\infty)} \tag{1.1}$$

,

то $T: B^{s}_{p,q,(r)} \to B^{\tilde{s}}_{\tilde{p},q,(r)}$. *Если, кроме того,* $p \le \tilde{p}$, *то* $T: B^{s}_{p} \to B^{\tilde{s}}_{\tilde{p}}$.

Заметим, что одномерная теорема для пространств B^{s}_{p} со слабыми условиями вида (1.1), вообще говоря, неверна. В п.1.7.1 приведен пример оператора T, который удовлетворяет слабым условиям при любых (p,s), $\tilde{p} = p, \ \tilde{s} = s, \ -\infty < s < +\infty, 1 < p < \infty, s = 1/p$, но оператор T не отображает пространство $B^{1/r}_{r}$ на $B^{1/r}_{r}$ ни при каком $r \in (1, \infty)$.

Для любого множества $G \subset R_2$ обозначим через G^0 - внутренность выпуклой оболочки множества G. Пусть точка M имеет координаты $(1/p, s)$. Обозначим пространство Бесова $B^{s}_{p,q,(r)}$ через $B_{M,q,(r)}$ или B^{s}_{p} через B_M.

Теорема 3.1.2/4. *Пусть во всех точках* Q*, принадлежащих множеству* $G \subset (0, 1) \times R_1$ *выполняются слабые условия*

$$T: B_{Q,1,(1)} \to B_{VQ,\infty,(\infty)},$$

Тогда для любой точки M *множества* G^0 *выполняются условия*

$$T: B_{M,q_2,(q_1)} \to B_{VM,q_2,(q_1)}.$$

Положим, что точка M *имеет координаты* $(1/p, s)$*, а точка* VM - $(1/p, s)$. *Если, кроме того,* $p \le \tilde{p}$, *то оператор*

$$T : B_M \to B_{VM}.$$

Известно, что вещественные интерполяционные методы плохо работают с билинейными операторами. Так из результатов Лионса и Петре[18] следует, что из всех функторов $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$, при $0<\theta<1, 1\le q\le\infty$, лишь функторы $(\cdot,\cdot)_{\theta,1}$ интерполируют билинейные операторы. В отличие от одномерных интерполяционных функторов, многомерные функторы интерполируют билинейные операторы в общей ситуации.

Теорема 3.1.3(1). *Если билинейный оператор W отображает $A_i \times B_j$ в пространство $E_{i,j}$, $(i=0,1;\ j=0,1)$, то W отображает $A_{\theta_1,q_1} \times B_{\theta_2,q_2}$ в $\Im_{\Theta,Q}((E_{i,j})_{j=0,1})_{i=0,1}$*

Из этого утверждения можно сделать следующие выводы.

Следствие. *Если линейный оператор $T : A_i \otimes_\pi B_j \to E_{i,j}$, то*
$$T : A_{\theta_1,q_1} \otimes_\pi B_{\theta_2,q_2} \to \Im_{\Theta,Q}((E_{i,j})_{j=0,1})_{i=0,1}.$$

Второй параграф третьей главы посвящен реализации многомерного интерполяционного метода Спарра[19] в классах пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля.

Общая теория многомерных методов разработана достаточно глубоко, однако их применение вызывает значительные трудности.

При реализации обычного «одномерного» метода очень полезной является теорема о реитерации.

Для метода Спарра известны три теоремы о реитерации (о стабильности по терминологии Спарра), в том числе очень полезные теоремы, связывающие функторы различной размерности. Однако, во всех этих теоремах содержится оговорка, что они справедливы только при условии выполнения в данном классе пространств равенства $A_{\bar\theta,q;K} = A_{\bar\theta,q;J}$. В отличие от метода Петре, справедливость этого равенства не гарантирована. Известны соответствующие контрпримеры[20]. Проверка условия $A_{\bar\theta,q;K} = A_{\bar\theta,q;J}$ в конкретном классе пространств, обычно достаточно сложно. Значительное продвижение в этом направлении достигнуто в статье И.Асекритовой и Н.Кругляка[21], которые показали, что равенство

[18] Lions J.L. Sur une classe d'espaces d'interpolation / J.L. Lions, J. Peetre // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ.Math. – 1964.– V.19. – P.5 – 68.

[19] Sparr G. Interpolation of several Banach spaces / G.Sparr // Ann. Mat. Pura Apll.–1976.– V.99.– P.247– 316.

[20] Sparr G. Interpolation of weighted L_p - spaces / G.Sparr // Studia Math.–1978.– V.62. – P.229 – 271.

[21] Асекритова И.А. Об эквивалентности K и J-методов для $(n+1)$-наборов в банаховых пространствах/ И.А.Асекритова, Н.Я.Кругляк // Studia math. – 1997. – V.122. – No.2.– P.99 – 116.

$A_{\overline{\theta},q;K} = A_{\overline{\theta},q;J}$ выполняется в семействах банаховых структур и их ретрактов. А пространства Бесова и Лизоркина-Трибеля как раз являются такими ретрактами. Это позволило им в дальнейшем реализовать вместе с группой авторов[22] метод Спарра в классе пространств Бесова. Одновременно близкие результаты были получены мною.

Дадим краткое описание метода Спарра. Пусть $\overline{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, где A_i- банаховы пространства, вложенные в одно общее хаусдорфово ТВП. Для $a \in \sum(\overline{A})$ запишем $K(\overline{t}, a, \overline{A}) = \inf\left\{t_0 \|a_0 | A_0\| + t_1 \|a_1 | A_1\| + \ldots + t_n \|a_n | A_n\|\right\}$, где $a = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Пусть H_+^n - множество всех векторов $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, для которых $\sum \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0$. Допустим, что $\overline{\theta} \in H_+^n$ и $1 \le q \le \infty$, тогда определим норму $\Phi_{\overline{\theta},q}$ с помощью равенства

$$\Phi_{\overline{\theta},q} := \left(\int_{R_+^n} \left| t_1^{-\theta_1} \ldots t_n^{-\theta_n} \cdot f(1, t_1, t_2, \ldots, t_n) \right|^q \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q}.$$

Пространство

$$(\overline{A})_{\overline{\theta},q} := \left\{ a \in \sum_{i=0}^{n} A_i : \left\| a \left| \left(\overline{A}\right)_{\overline{\theta},q} \right. \right\| = \Phi_{\overline{\theta},q}(K(\overline{t}, a, \overline{A})) < \infty \right\}.$$

Пространства $(\overline{A})_{\overline{\theta},q}$ обладают интерполяционными свойствами, аналогичными свойствам обычных пространств $A_{\theta,q}$ Петре.

Для пространств Бесова $B_{p,q,(q)}^s$ доказана интерполяционная теорема.

Теорема 3.2.3/1. *Пусть точки* $M_j(1/p_j, s_j), j = 0,1,\ldots,m; m > 2$ *образуют выпуклый многоугольник. Предположим, что никакие три из них не лежат на одной прямой и* $1 < p_j < \infty, 1 < q_j < \infty$, $\overline{\lambda} \in H_+^m$, $s = \sum_{j=0}^{m} s_j \lambda_j$, $1/p = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j / p_j$. *Тогда*

$$\left(B_{p_j,q_j,(q_j)}^{s_j}\right)_{\overline{\lambda},q} = B_{p,q,(q)}^s.$$

Пусть точка M имеет координаты $(1/p, s)$. Для наглядности будем обозначать через $F_{(M),q,(r)}$ пространство $F_{p,q,(r)}^s$

[22] Asekritova I. Lions-Peetre reiteration formulas for triples and applications / I. Asekritova, N. Krugljak, L.Maligranda, L.Nikolova, L-E.Persson // Studia Math. – 2001.–V.145.– P.219 – 254.

Теперь можно сформулировать интерполяционную теорему для пространств Бесова, использующую слабые условия вида $T:F_{(M),1,(1)}\to F_{(N),\infty,(\infty)}$.

Теорема 3.2.3/2. *Пусть заданы два невырожденных треугольника* $\Delta M_j(1/p_j,s_j)$, $\Delta N_j(1/r_j,u_j)$ *и вектор* $\overline{\theta}\in H_+^2$. *Для линейного оператора* T *выполняются слабые условия* $T:F_{(M_j),1,(1)}\to F_{(N_j),\infty,(\infty)}$, $j=0,1,2;$ $1/p=\sum_{j=0}^{2}\theta_j/p_j,\quad s=\sum_{j=0}^{2}\theta_j s_j$, $1/r=\sum_{j=0}^{2}\theta_j/r_j$,. *Тогда оператор* $T:B^s_{p,q,(q)}\to B^u_{r,q,(q)}$. *Если, кроме того, выполняется условие* $r\ge p$, *то оператор* $T:B^s_p\to B^u_r$.

Глава 4 посвящена описанию интерполяции пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля на области. Содержание главы изложено в статьях автора [11], [13], [15].

Интерполяционные пространства $BL^{s,k}_{p,q}$ изучались в главе 1. При этом было получено описание интерполяционных пространств в терминах «декомпозиционных» норм, т.е. норм, использующих свертки с фиксированной последовательностью функций $\left\{\varphi_j\right\}_{j=0}^{\infty}\in\Phi$. Для пространств на R_n это естественный тип норм, удобный с точки зрения интерполяции. Однако, при переходе к пространствам на областях «хорошие» описания норм этого типа неизвестны даже для исходных пространств $B^s_p(G)$. Более перспективными для перехода к нормам на области выглядят нормы, использующие дифференциально-разностные конструкции. В данной главе предлагается несколько описаний таких норм.

Заметим, что интерполяционные результаты, сформулированные для пространств $B^s_p\left(R_n\right)$ легко перенести на случай пространств Бесова на области $B^s_p(G)$, если определить норму $\left\|\cdot\left|B^s_p(G)\right.\right\|$ с помощью равенства $\left\|f\left|B^s_p(G)\right.\right\|=\ \inf_{g\in\Pr f}\left\|g\left|B^s_p\left(R_n\right)\right.\right\|$, где $\Pr f$ - множество всевозможных продолжений функции f на R_n. Однако для пространств на области желательно получить «внутреннее» описание нормы. Иными словами такое описание, в котором не используются никакие продолжения функций за границу области. В «диагональном» случае первые результаты такого типа для пространств Соболева были получены Лионсом и Madженесом[23] и

[23] Lions J.L. Problemes and limites non homogenes /J.L. Lions, E.Magenes // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1961.– V. 15.– P.39 – 101.

Madдженесом[24]. Для многомерного анизотропного и «диагонального» случая известны результаты О.В.Бесова[25,26].

В данной главе получено внутреннее описание интерполяционной нормы в «недиагональном» случае.

Для пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля известно несколько вариантов дифференциально-разностных норм. Используя их в качестве «базовых» получим несколько соответствующих вариантов интерполяционных норм.

В параграфе 4.1 получено описание интерполяционной нормы $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ «на базе» нормы пространства $F^{s}_{p,q}(R_n)$ из книги Трибеля[2] (с.132). Обозначим через $\omega_f(r,x,\ell)$ функционал, определенный равенством $\omega_f(r,x,\ell):=\sup_{|\rho|\le r}\left|\Delta^{\ell}_{\rho}f\right|$. Доказана интерполяционная теорема для пространств $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ с нормой

$$\left\|f\left|BL^{s,k}_{p,q}(R_n)\right\|:=\left\|f\left|L_{p,q}(R_n)\right\|+\right.\right.$$

$$+\left\|\omega_f(r,x)\left|L_{p,q}\left((0,\delta)\times R_n, r^{-b}, r^{-k-1}m_{n+1}\right)\right\|,\right.$$

где $0<\delta\le\infty.$

В параграфе 4.2 доказана интерполяционная теорема для пространств Бесова на области с сильным условием конуса. В качестве базовой, используется конструкция нормы для пространств Бесова на области, рассмотренная в статье[27]. Получено внутреннее описание интерполяционной нормы. При этом используются обозначения и определения статьи[24], хотя в этой статье рассматривается анизотропный случай, а здесь изотропный.

Обозначим через Q_0 «двоичный» куб $Q_0=(-1;1)^n$. Пусть $x,y,a\in R_n$, $h\in R_1, E\subset G\subset R_n$ и $m-$ целое положительное число. Положим

$$\Delta^m_i(h,E)f(x):=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\frac{m!}{j!(m-j)!}f(x+jhe^i)$$

---

[24] Magenes E. Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных / E.Magenes // УМН. – 1966.– № 2.– С.169 – 218.

[25] Бесов О.В. О пространствах Соболева-Луивилля и Лизоркина-Трибеля на области/ О.В.Бесов // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова.– 1990.– Т.192.– С.20 – 34.

[26] Бесов О.В. Интерполяция пространств дифференцируемых функций на области / О.В.Бесов // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова.– 1997.– Т.214.– С.59 – 82.

[27] Бесов О.В. О пространствах Соболева-Луивилля и Лизоркина-Трибеля на области/ О.В.Бесов // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова.– 1990.– Т.192.– С.20 – 34.

при $[x,x+mhe^i]\subset E$; и $\Delta_i^m(h,E)f(x):=0$ при $[x,x+mhe^i]\not\subset E$, где e^i - единичный вектор, i-ая координата которого равна 1, а остальные 0.

При $t>0$ рассмотрим множество $G_t=\{x: x+tQ_0\subset G\}$ и при $m>0$ функционал

$$\delta_i^{(m)}(f,x,t)=\int_{-1}^{1}\left|\Delta_i^m(tu,G_t)f(x)\right|du.$$

Доказана интерполяционная теорема с «внутренней» нормой.

Пространство $BL_{p,q}^{s,k}(G)$**.** Пусть $1<p<\infty, 1\le q\le\infty$ $-\infty<s,k<\infty$. Обозначим через $BL_{p,q}^{s,k}$ пространство функций с нормой

$$\left\|f\left|BL_{p,q}^{s,k}(G)\right\|^1=\left\|f\left|L_{p,q}(G)\right\|+\right.\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}\left(\left\{\delta_i^{(m)}\left(f,x,d^{-j}\right)\cdot d^{-j(s-k/p)}\right\}_{j=0,1,2...}^{i=1,2,...n}\right)^*_{d^{jk}\eta\otimes m_n}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Конус. Для любого $z\in R_n$ и чисел $0\le t\le T, 0<\delta_0$ назовем конусом множество вида

$$x+V(\delta_0)=x+\bigcup_{0<t\le T}[zt+t\delta_0Q_0]\subset G.$$

Условия конуса. Область $G\subset R_n$ назовем областью с усиленным условием конуса, если существует конечное число N открытых множеств $G_\nu(\delta_0)=\bigcup\limits_{0<t\le T}\left(z^{(\nu)}t+t\delta_0Q_0\right),\ z^{(\nu)}\in R_n,\ 0<\delta_0\le 1,\ 0<T<\infty$

таких, что при некотором $\varepsilon>0$

$$G=\bigcup_{\nu=1}^{N}G_\nu=\bigcup_{\nu=1}^{N}\left(G_\nu+V_\nu(\delta_0)\right)=\bigcup_{\nu=1}^{N}G_\nu^{(\varepsilon)},$$

где

$$G_\nu^{(\varepsilon)}=\left\{x: x\in G_\nu, \operatorname{dist}\left(x,\partial G_\nu\setminus\partial G\right)>\varepsilon\right\}.$$

Если же это равенство справедливо с $G_\nu^{[\varepsilon]}$ вместо $G_\nu^{(\varepsilon)}$, где

$$G_\nu^{[\varepsilon]}=\left\{x: x\in G_\nu, \operatorname{dist}\left(x,G\setminus G_\varepsilon\right)>\varepsilon\right\},$$

то G назовем областью с сильным условием конуса

Теорема 4.2.2/2. *Пусть* $1<p_i<\infty, 0<s_i<\infty, i=0,1; 0<\theta<1,$ $1\le q\le\infty, \dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1},\ s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$ *и*

$$k := \frac{(s_1 - s_0) p_0 p_1}{p_0 - p_1};\ b := s - k / p \text{ -}$$

коэффициенты из уравнения прямой $s = k \cdot (1/p) + b$, *проходящей через точки* $(1/p_i, s_i)$, $k \neq 0$, G *- область с сильным условием конуса. Тогда*

$$\left(B_{p_0}^{s_0}(G), B_{p_1}^{s_1}(G)\right)_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}(G)$$

с нормой $\left\| f \left| BL_{p,q}^{s,k}(G) \right\|^1 \right.$.

В параграфе 4.3 рассматриваются интерполяционные пространства аналитических функций на окружности с дифференциально-разностной нормой.

Пусть $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ - единичная окружность на комплексной плоскости; $D = \{z \in C : |z| < 1\}$- единичный открытый круг.

$\mathbf{D}_+{}'$ - пространство аналитических на T функций:

$$\mathbf{D}_+{}' = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} c_n e^{int} : |c_n| = O(n^\beta), n \to \infty, \beta = \beta(f) < \infty \right\}.$$

Любая функция из $\mathbf{D}_+{}'$ имеет единственное продолжение на D.

Рассмотрим два случая а) $0 < s_i < 1, 1 < p_i < \infty$; и б) $-1 < s_i < 0$, $1 < p_i < \infty$.

Интерполяционное пространство Бесова $A_{p,q}^{(k,b)}$ в случае а) определим как пространство всех аналитических на T функций, для которых $f' \in L_{p,q}\left((1-|z|)^{1-b}, (1-|z|)^{-k-1} \cdot m_2\right) \bigcap \mathbf{D}_+{}'$ с нормой

$$\left\| f \left| A_{p,q}^{(k,b)} \right\| = \left\| f' \left| L_{p,q}\left(D, (1-|z|)^{1-b}, (1-|z|)^{-k-1} \cdot m_2\right) \right\| \right. \right..$$

В случае б) положим

$$A_{p,q}^{(k,b)} = L_{p,q}\left((1-|z|)^{-b}, (1-|z|)^{-k-1} \cdot m_2\right) \bigcap \mathbf{D}_+{}'$$

с нормой

$$\left\| f \left| A_{p,q}^{(k,b)} \right\| = \left\| f \left| L_{p,q}\left(D, (1-|z|)^{1-b}, (1-|z|)^{-k-1} \cdot m_2\right) \right\| \right. \right..$$

Рассмотрим интерполяционную теорему для пространств Бесова A_p^s.

Теорема 4.3.4/1. *Пусть для чисел* $s_i, p_i, i = 0,1$ *выполняются либо условие а)* $0 < s_i < 1, 1 < p_i < \infty$, *либо б)* $-1 < s_i < 0$, $1 < p_i < \infty$. *Кро-*

ме того, пусть $0<\theta<1, 1\le q\le\infty,\ 1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_\theta$. *Тогда* $\left(A_{p_0}^{s_0}, A_{p_1}^{s_1}\right)_{\theta,q}=A_{p,q}^{(k,b)}$.

В результате мы получили самое простое описание интерполяционной нормы. К сожалению, оно годится только для пространств аналитических функций и специального случая пространств на окружности.

В **главе 5** рассматриваются пространства рациональной аппроксимации по нормам пространств BMO, H_p и L_∞. Содержание главы изложено в статьях автора [1], [3], [5], [8], [16], [17], [18]. Основная задача главы – с помощью интерполяции получить как можно более широкие классы пространств рациональной аппроксимации. В случае аппроксимации по нормам H_p и L_∞ используется традиционная версия К-метода с функторами $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$, а при аппроксимации по норме BMO - более общие варианты вещественного метода Петре: К-метод с функциональным параметром и К-метод с симметричным параметром.

В параграфе 5.1 даются основные определения и вводятся обозначения. Рассматриваются различные варианты норм пространств Бесова на окружности. В том числе дано определение нормы пространств Бесова на языке потенциалов Грина и с помощью последовательности сверток.

Пространства Бесова на окружности. Для любого целого n определим на T функции $W_n, n\in Z$.

Пусть $n>0$. Тогда положим, что $\widehat{W}_n(k)=0$, если $k\notin\left(2^{n-1},2^{n+1}\right)$. Пусть также $\widehat{W}_n\left(2^n\right)=1$ и $\widehat{W}_n(k)$ - линейная функция на промежутках $\left[2^{n-1},2^n\right]$ и $\left[2^n,2^{n+1}\right]$. Если $n<0$, то положим $W_n=\overline{W_{-n}}$. И, наконец, $W_0=\overline{z}+1+z$.

Пространством Бесова $B_p^s(T), -\infty<s<\infty, 1\le p<\infty$, назовем класс функций $f\in L_1$ таких, что

$$\left\|f\left|B_p^s\right\|^{(1)}=\left(\sum_{n\in Z}\left(2^{|n|s}\left\|W_n*f\left|L_p\right\|\right)^p\right)^{1/p}<\infty.\right.\right.$$

Очевидно, $\left\|f\left|B_p^s\right\|^{(1)}=\left\|W_n*f\left|L_p\left(T\times Z,2^{|n|s},m\times\nu\right)\right\|\right.\right.$. Здесь свертка двух функций $f*g$ определяется равенством

$$f*g:=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\widehat{f}\cdot\widehat{g}\right)\cdot z^j.$$

Определение пространств Бесова на языке потенциалов Грина.

Пусть E - одна из следующих областей на комплексной плоскости: $E_1 = \left\{ z \in C : 1/2 < |z| < 2 \right\}$ и $E_2 = \left\{ z \in C : 1 < |z| < 2 \right\}$. Для любой банаховой решетки $L(E)$ через $L(E, \omega, \mu)$ обозначим пространство L с весом ω, состоящее из функций, заданных на E с мерой μ. Пусть при любом $\xi \in C$

$$\rho(\xi) := \left| |\xi| - 1 \right|,$$

$$\varphi_*(\xi) := \operatorname*{esssup}_{|\xi - \lambda| \le \rho(\xi)/2} |\varphi(\lambda)|.$$

Определим операторы

$$(G\varphi)(\tau) := -\frac{1}{\pi} \int_E \varphi(\xi) \frac{dm_2(\xi)}{\xi - \tau};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \; z = x + iy;$$

$$(Vf)(\xi) := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\left(\sum_{k=0}^{\ell - 1} \widehat{f}^{(k)} (1/\overline{\xi}) (\xi - 1/\overline{\xi})^k / k! \right) F(|\xi|) \right],$$

где ℓ - целое число, $\ell > s$, F - такая функция класса $C^\infty([1, +\infty))$, что $F\Big|_{[1, 3/2]} = 1$, $\operatorname{supp} F \subset [1, 2]$.

При $0 < p \le \infty, -\infty < s < \infty$ рассмотрим классы функций

$$\left\{ \varphi : \int_E (\varphi_*(\xi))^p \rho(\xi)^{-p(s-1)-1} dm_2(\xi) < \infty \right\}$$

с нормой $\|\varphi\| = \left\| (\varphi)_* \Big| L_p\left(E, \rho^{-(s-1)-1/p}, m_2\right) \right\|$. При $E = E_1$ обозначим такой класс через L_p^s, а при $E = E_2$ - через $\tilde{L}_p^s$.

Пусть $p > 0$, $s > \max(0, 1/p - 1)$. Пространство $B_p^s(T)$ определим с помощью оператора G как множество образов $B_p^s(T) = GL_p^s = \left\{ f : \exists \varphi \in L_p^s; f = G\varphi \right\}$.

Аналогично, пространство аналитических функций $A_p^s(T)$ определим как множество образов $A_p^s(T) = G\tilde{L}_p^s = \left\{ f : \exists \varphi \in \tilde{L}_p^s; f = G\varphi \right\}$.

В параграфе 5.2 рассматривается интерполяция следующих пар пространств:

a) пары идеальных пространств (банаховых структур) L_p^s;

b) пары пространств Бесова $B_p^s(T)$ или $A_p^s(T)$;

Рассмотрим соответствующие интерполяционные пространства.

Пространство $L_{p,q}^{s,k}$. Пусть $0 < p, q \le \infty, -\infty < s, k < \infty$. Обозначим через $\widehat{L}_{p,q}^{s,k}(E)$ пространство Лоренца с весом определенные с помощью равенства

$$\widehat{L}_{p,q}^{s,k}(E) := L_{p,q}\left(E, \rho^{-(s-k/p)+1}, \rho^{-k-1} \cdot m_2\right).$$

Пространство $L_{p,q}^{s,k}(E)$ определим как множество с нормой $\left\|\varphi \middle| L_{p,q}^{s,k}(E)\right\| = \left\|\varphi_* \middle| \widehat{L}_{p,q}^{s,k}\right\|$.

Множество E совпадает с одним из множеств E_1 или E_2, множитель

$$\rho(\xi) = \left\||z| - 1\right|, \ \xi \in C.$$

Пространства $BL_{p,q}^{s,k}(T)$ **и** $AL_{p,q}^{s,k}(T)$**.** Пусть $0 < p, q \le \infty, -\infty < s, k < \infty.$

Через $BL_{p,q}^{s,k}(T)$ $\left(AL_{p,q}^{s,k}(T)\right)$ обозначим интерполяционное пространство Бесова (интерполяционное пространство Бесова аналитических функций) с нормой (квазинормой, если $p < 1$ или $q < 1$):

$$\left\|\varphi \middle| BL_{p,q}^{s,k}\right\|^{(1)} = \left\|W_n * \varphi \middle| L_{p,q}\left(T \times Z, 2^{(s-k/p)n}, 2^{kn} \nu \times m\right)\right\|.$$

Здесь функции W_n определены в п.5.1.2, при определении пространства Бесова на окружности; $2^{(s-k/p)}$ - вес, ν - атомическая мера на Z равная единице на любом множестве, состоящем из одного элемента.

Если в этом определении заменить множество Z на $Z_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ мы получим определение нормы $\left\|\varphi \middle| AL_{p,q}^{s,k}\right\|^{(1)}$.

Другой вариант интерполяционных норм получается при использовании потенциалов Грина.

В этом случае нормы (квазинормы) определяются равенствами:

$$\left\|\varphi \middle| BL_{p,q}^{s,k}\right\|^{(2)} = \left\|V\varphi \middle| L_{p,q}^{s,k}(E_1)\right\| \text{ и } \left\|\varphi \middle| AL_{p,q}^{s,k}\right\|^{(2)} = \left\|V\varphi \middle| L_{p,q}^{s,k}(E_2)\right\|.$$

.

Получена интерполяционная теорема для пространств Бесова на окружности с интерполяционными функторами вида $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ аналогичная тео-

теореме 1.2.3. Фактически здесь доказывается, что нормы $\left\| \cdot \left| BL_{p,q}^{s,k} \right\|^{(1)}$ и $\left\| \cdot \left| BL_{p,q}^{s,k} \right\|^{(2)}$ являются нормами интерполяционного пространства.

Теорема 5.2.2. *Для любых чисел* $1 \le p_0, p_1 < \infty; 0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$ *и* p *такого, что* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$; $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, *имеет место равенство*

$$\left(B_{p_0}^{s_0}, B_{p_1}^{s_1}\right)_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}.$$

При этом в пространстве $BL_{p,q}^{s,k}$ *используется норма* $\left\| \varphi \left| BL_{p,q}^{s,k} \right\|^{(1)}$.

Теорема 5.3.2. *Пусть* $0 < p_i < \infty, 0 < q < \infty, 0 < \theta < 1$, $-\infty < k, s < \infty$, $s_i = k/p_i + b$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$; $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$;

$s_i > \max(0, \frac{1}{p_i} - 1)$, $s_i = k/p_i + b$ *- прямая, проходящая через точки* $(1/p_i, s_i)$, $i = 0,1$. *Тогда*

$$\left(A_{p_0}^{s_0}(T), A_{p_1}^{s_1}(T)\right)_{\theta,q} = AL_{p,q}^{s,k}(T),$$

$$\left(B_{p_0}^{s_0}(T), B_{p_1}^{s_1}(T)\right)_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}(T),$$

где $AL_{p,q}^{s,k}(T) = \left\{ f : \left\| f \left| AL_{p,q}^{s,k} \right\|^{(2)} < \infty \right\}$,

$$BL_{p,q}^{s,k}(T) = \left\{ f : \left\| f \left| BL_{p,q}^{s,k} \right\|^{(2)} < \infty \right\}.$$

В параграфе 5.4. дано описание интерполяционных методов, являющихся вариантами К-метода Петре. Это К-метод с симметричным параметром[28] и К-метод с функциональным параметром[29,30].

К-метод с функциональным параметром.

Пусть **B** - класс непрерывных функций $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, для которых $f(1) = 1$ и величина

---

[28] Bennet C. Banach Function Spaces and Interpolation Methods. 1.The Abstract Theory. / C.Bennet // Journal of functional analysis.–1974.– V.17.– P.409 – 440.

[29] Калугина Т.Ф. Интерполяция банаховых пространств с функциональным параметром. Теорема реитерации / Т.Ф.Калугина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ.– 1975.– №. 6.– С.68 – 77.

[30] Merucci C. Applications of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces / .Merucci // Lect. Notes Math.– 1984.– ¹1070.– P.183 – 201.

$$\overline{f}(t) := \sup_{s>0} f(st)/f(s) < \infty \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Для функций из класса $\mathbf{B}$ определим индексы Бойда

$$\alpha_{\overline{f}} \overset{def}{=} \inf_{1<t<\infty} \frac{\log \overline{f}(t)}{\log t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \overline{f}(t)}{\log t},$$

$$\beta_{\overline{f}} \overset{def}{=} \inf_{0<t<1} \frac{\log \overline{f}(t)}{\log t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log \overline{f}(t)}{\log t},$$

которые удовлетворяют неравенствам[25]: $-\infty < \beta_{\overline{f}} \le \alpha_{\overline{f}} < +\infty$.

Для функции $f \in \mathbf{B}$ определим интерполяционное пространство

$$(A_0, A_1)_{f,q;K} :=$$
$$= \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{f,q;K} = \left\| K(t,a,A_0,A_1)/f(t) * t^{1/q} \right| L_q \right\| < \infty \right\},$$

где $0 < q \le \infty$.

В параграфе 5.5 К-метод с функциональным параметром реализуется в классах банаховых структур. Рассматриваются следующие структуры.

Пространства Лоренца с весом $\Lambda_\Phi^q(X,\omega,\mu)$. Для функции $\Phi \in \mathbf{B}$ и $0 < q \le +\infty$ определим пространство Лоренца Λ_Φ^q как множество измеримых функций с конечной квазинормой

$$\left\| a \middle| \Lambda_\Phi^q \right\| = \left\| \Phi(t) \cdot (\omega(x) \cdot a(x))_\mu^*(t) \middle| L_q\left((0,\infty), t^{-1/q}, m_1\right) \right\|,$$

где $(a)_\mu^*$ - равноизмеримая перестановка функции a относительно меры μ, а функция ω является весом.

Пространства $L_{\Phi,q}^{(k,b)}(E)$. Норму (квазинорму) пространства $L_{\Phi,q}^{(k,b)}(E)$ определим с помощью равенства

$$\left\| \varphi \middle| L_{\Phi,q}^{(k,b)}(E) \right\| := \left\| \Lambda_\Phi^q\left(E, \rho^{-b+1}, \rho^{-k-1} \cdot m_2\right) \right\|,$$

где, как и раньше, множество E может иметь вид $E_1 = \{1/2 < |z| < 2\}$ или $E_2 = \{1 < [z] < 2\}$ и $0 < q \le \infty, -\infty < b,k < \infty$.

Пространства $BL_{\Phi,q}^{(k,b)}(E)$ **и** $L_{\Phi,q}^{(k,b)}(E)$. Пусть $0 < q \le \infty$, $-\infty < b,k < \infty$. Тогда

$$BL_{\Phi,q}^{(k,b)}(E) := \left\{ \varphi \in D' : \left\| BL_{\Phi,q}^{(k,b)} \right\| = \left\| V\varphi \middle| L_{\Phi,q}^{(k,b)}(E) \right\| < \infty \right\}$$

при $E = E_1 = \left\{ z \in C : 1/2 < |z| < 2 \right\}$ и

$$AL_{\Phi,q}^{(k,b)}(E) := \left\{ \varphi \in D' : \left\| AL_{\Phi,q}^{(k,b)} \right\| = \left\| V\varphi \middle| L_{\Phi,q}^{(k,b)}(E) \right\| < \infty \right\}$$

при $E = E_2 = \left\{ z \in C : 1 < |z| < 2 \right\}$.

Для пространств L_p^s доказана интерполяционная теорема.

Теорема 5.4.2. *Пусть функция* $f \in \mathbf{B}$ *и* $0 < \beta_{\bar f} \le \alpha_{\bar f} < 1, 0 < q \le \infty$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $0 < p_0, p_1 < \infty$; *точки* $(1/p_i, s_i)$ *лежит на прямой с уравнением* $s = k\alpha + b$ *и, наконец, функция*

$$\Psi(t) := \frac{t^{1/p_0}}{f\left(t^{1/p_0 - 1/p_1}\right)}.$$

Тогда

$$\left(L_{p_0}^{s_0}, L_{p_1}^{s_1} \right)_{f,q;K} = L_{\Psi,q}^{(k,b)},$$

где $\alpha_{\bar f}$ *и* $\beta_{\bar f}$ *- индексы Бойда функции* $f \in \mathbf{B}$.

Рассмотрим пространства последовательностей. Пусть функция $\Phi \in \mathrm{B}$, $-\infty < \beta_{\bar\Phi} \le \alpha_{\bar\Phi} < \infty$.

Обозначим через λ_Φ^q пространство последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, для которых конечны квазинормы

$$\left\| (a_n) \middle| \lambda_\Phi^q \right\| = \left\| a_n^* \cdot \Phi(n) / n^{1/q} \middle| \ell_q \right\|$$

при $q < \infty$ или

$$\left\| (a_n) \middle| \lambda_\Phi^\infty \right\| = \sup_n \Phi(n) a_n^*.$$

Здесь (a_n^*)- невозрастающая перестановка последовательности (a_n).

Для пространств последовательностей доказана интерполяционная теорема.

Теорема 5.4.3./1. *Пусть функция* $0 < \beta_{\bar\Phi} \le \alpha_{\bar\Phi} < \infty$, $\Phi \in \mathbf{B}$, $0 < p_0, p_1, q < \infty$, $p_0 < p_1, \Psi(t) = t^{1/p_0} / \Phi\left(t^{1/p_0 - 1/p_1}\right)$. *Тогда* $\Psi \in \mathbf{B}$ *и*

$$\left(\ell_{p_0}, \ell_{p_1} \right)_{\Phi,q,K} = \lambda_\Psi^q.$$

В следующей теореме дано описание пространств последовательностей, которые могут быть получены с помощью интерполяции из пары пространств $\left(\ell_{p_0}, \ell_{p_1} \right)_{\Psi,q,K}$.

Теорема 5.4.3/2. *Если функция* $\Phi \in \mathbf{B}, 0<\beta_{\overline{\Phi}} \leq \alpha_{\overline{\Phi}} < +\infty$, $0 < q \leq \infty$*, то существуют такие числа* $p_0, p_1 \in (0,\infty)$ *и функция* $f \in \mathbf{B}$*, что*

$$\left(\ell_{p_0}, \ell_{p_1}\right)_{f,q,K} = \lambda_{\Phi}^{q}.$$

В параграфе 5.5 рассматривается интерполяция с помощью К-метода с симметричным параметром (метод Беннетта).

К-метод с симметричным параметром.

k-метод. Допустим, что для данной пары пространств (X_1, X_2) их пересечение $X_1 \bigcap X_2$ всюду плотно в каждом из пространств X_i. В этом случае для любого элемента $f \in X_1 + X_2$ существует единственная функция $\mathbf{k}(t;f)$, для которой $K(t;f) = \int\limits_0^t \mathbf{k}(s;f)ds$.

Определение. Если (X_1, X_2)- банахова пара и σ- симметричная норма, обозначим как $(X_1, X_2)_{\sigma;\mathbf{k},Benn}$ пространство элементов $f \in X_1 + X_2$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{\sigma;\mathbf{k},Benn} = \sigma\left(\mathbf{k}(t;f)\right).$$

Пространства последовательностей.

Для симметричной нормы σ определим пространство числовых последовательностей $\ell_{\sigma;Benn}$ с нормой

$$\left\|\left(c_n\right)_{n=0}^{\infty}\middle|\ell_{\sigma,\mathbf{k};Benn}\right\| = \sigma\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_{(n;n+1]}\right)$$

Пространства $L_{\sigma,Benn}^{(k,b)}$. Пусть σ - симметричная норма и $-\infty < k,b < \infty$. Пространство $L_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)}$ определим как банахову структуру с нормой

$$\left\|\varphi\middle|L_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)}\right\| = \left\|\varphi_*\middle|L_{\sigma,\mathbf{k};Benn}\left(E,\, \rho^{-b+1}, \rho^{-k-1}m_2\right)\right\| =$$

$$= \sigma\left(\left(\left(\varphi(\xi)\right)_* \cdot \rho^{-b+1}(\xi)\right)^*_{\rho^{-k-1}m_2}\right).$$

Пространства $BL_{\sigma,Benn}^{(k,b)}$ и $AL_{\sigma,Benn}^{(k,b)}$. Пусть $-\infty < b,k < \infty$. Тогда

$$BL_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)} := \left\{\psi \in D' : \left\|\psi\middle|BL_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)}\right\| = \left\|V\psi\middle|L_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)}(E_1)\right\| < \infty\right\}$$

и

$$AL_{\sigma,Benn}^{(k,b)} := \left\{\psi \in D' : \left\|\psi\middle|AL_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)}\right\| = \left\|V\psi\middle|L_{\sigma,\mathbf{k};Benn}^{(k,b)}(E_2)\right\| < \infty\right\}.$$

Для пространств $L^{(k,b)}_{\sigma,\mathbf{k};Benn}$ доказана интерполяционная теорема.

В параграфе 5.6 доказаны интерполяционные теоремы для пространств Бесова на окружности, полученные с помощью К-метода с симметричным параметром[31] и К-метода с функциональным параметром.

Для К-метода с функциональным параметром.

Теорема 5.6.2. Для любой функции $f \in \mathbf{B}$, у которой $0 < \beta_{\bar{f}} \le \alpha_{\bar{f}} < 1,\ 1 \le q \le \infty, 1 < p_0, p_1 < \infty, \quad 1/p_i - 1 < s_i < \infty,$ $p_0 \ne p_1,\ i = 0,1$. Тогда

$$a)\left\|\varphi\left|\left(B^{s_0}_{p_0}(T), B^{s_1}_{p_1}(T)\right)_{f,q;K}\right.\right\| \sim \left\|V\varphi\left|\left(L^{s_0}_{p_0}(E_1), L^{s_1}_{p_1}(E_1)\right)_{f,q;K}\right.\right\| \sim$$

$$\sim \left\|V\varphi\left|L^{(k,b)}_{\Phi,q}(E_1)\right.\right\| = \left\|\varphi\left|BL^{(k,b)}_{\Phi,q}\right.\right\|;$$

$$b)\left\|\varphi\left|\left(A^{s_0}_{p_0}(T), A^{s_1}_{p_1}(T)\right)_{f,q;K}\right.\right\| \sim \left\|V\varphi\left|\left(L^{s_0}_{p_0}(E_2), L^{s_1}_{p_1}(E_2)\right)_{f,q;K}\right.\right\| \sim$$

$$\sim \left\|V\varphi\left|L^{(k,b)}_{\Phi,q}(E_2)\right.\right\| = \left\|\varphi\left|AL^{(k,b)}_{\Phi,q}\right.\right\|.$$

Здесь $\Phi(t) = t^{1/p_0} / f\left(t^{(p_0-p_1)/p_0p_1}\right)$, а k и b - коэффициенты из уравнения прямой $s = k\left(1/p\right) + b$, проходящей через точки $\left(1/p_i, s_i\right),\ i = 0,1$.

В параграфе 5.7. рассматриваются пространства рациональной аппроксимации на единичной окружности комплексной плоскости по нормам BMO, H_p и L_∞. Для норм пространства BMO используются результаты В.В.Пеллера[4] и В.В.Пеллера, С.В.Хрущева[5]. В этих работах был получен сравнительно узкий класс пространств рациональной аппроксимации, который затем был расширен с помощью интерполяции. При этом использовался К-метод в своей традиционной версии с функторами $\left(\cdot,\cdot\right)_{\theta,q}$. С помощью более общих интерполяционных методов в диссертации получен еще более широкий класс пространств рациональной аппроксимации. Для аппроксимации по нормам H_p и L_∞. ограничимся функторами $\left(\cdot,\cdot\right)_{\theta,q}$.

Пространства BMO и BMOA. Функция

$$\varphi \in BMO(T) \Leftrightarrow \left\|\varphi\left|BMO(T)\right.\right\| := \left|\hat{\varphi}(0)\right| + \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I \left|\varphi - \varphi_I\right| dm < \infty.$$

[31] Bennet C. Banach Function Spaces and Interpolation Methods. 1.The Abstract Theory. / C.Bennet // Journal of functional analysis.–1974.– V.17.– P.409 – 440.

Подпространство всех аналитических функций из BMO будем обозначать через BMOA.

Через $\Re_n$ обозначим множество рациональных функций на C с полюсами вне круга $\operatorname{clos} D := \{z \in C : |z| \le 1\}$, сумма кратностей которых (с учетом точки ∞ не превосходит n). Для функции $f \in BMOA(T)$ положим

$$r_n(f) = dist_{BMOA}(f, \Re_n).$$

Аналогично, через $\mathbf{R}_n$ обозначим множество рациональных функций на C с полюсами вне окружности T, сумма кратностей которых (с учетом точки ∞) не превосходит n. Для функции $f \in BMO(T)$ положим

$$d_n(f) = dist_{BMO}(f, \mathbf{R}_n).$$

Определение. Будем говорить, что пространство $X \subset BMO$ ($XA \subset BMOA$) допускает описание в терминах рациональной аппроксимации в норме $BMO(BMOA)$, если существует такое идеальное пространство последовательностей ℓ, что $f \in X \Leftrightarrow \{d_n(f)\}_{n\ge 0} \in \ell$ $\left(f \in XA \Leftrightarrow \{r_n(f)\}_{n\ge 0} \in \ell\right)$. Будем называть такие пространства X $\mathbf{R}$ - пространствами (такие пространства XA $\Re$ пространствами).

В указанных выше статьях, В.В.Пеллером было показано что $f \in B_p^{1/p} \Leftrightarrow \{d_n(f)\}_{n\ge 0} \in \ell_p$. Затем, интерполируя вдоль прямой $s = 1/p$, было получено описание пространств рациональной аппроксимации $G_{p,q}^{1/p}$, для которых справедливо следующее утверждение.

Теорема (В.В.Пеллер, С.В.Хрущев) *Пусть* $f \in BMO,\ 0 < p < \infty;\ 0 < \lambda < \infty, 0 < q < +\infty.$ *Тогда*

a) $d_n(f) = O(n^{-\lambda}) \Leftrightarrow f \in G_{1/\lambda,\infty}^{\lambda}$;

b) $\sum\limits_{n\ge 0} (d_n(f))^q (1+n)^{q/p-1} < +\infty \Leftrightarrow f \in G_{p,q}^{1/p}$.

Применяя интерполяцию с помощью K-метода с функциональным или симметричным параметром доказаны следующие теоремы.

Теорема 5.7.2/1 *Пространство* $AL_{\Phi,q}^{(1,0)}$ *при* $\Phi \in \mathbf{B}, 0 < \beta_{\overline{\Phi}} \le \alpha_{\overline{\Phi}} < 1$ *является пространством рациональной аппроксимации. При этом функция*

$$\varphi \in AL_{\Phi,q}^{(1,0)} \Leftrightarrow \{r_n(\varphi, BMOA)\} \in \lambda_{\Phi}^q.$$

Теорема 5.7.2/2. *Пусть* σ - *симметричная норма с индексами* $0<\beta\le\alpha<1$. *Пространство* $AL^{(1,0)}_{\sigma;\mathbf{k},\,Benn}$ *является пространством рациональной аппроксимации. При этом* $\varphi\in AL^{(1,0)}_{\sigma;\mathbf{k},\,Benn}\Leftrightarrow\{r_n\varphi\}\in\lambda_{\sigma;\mathbf{k},Benn}$.

Для того чтобы сформулировать аналогичные теоремы для пространств BL дадим несколько определений.

Норму Γ идеального пространства $L(X)$ назовем **квазисимметричной**, если существует симметричная норма σ, эквивалентная Γ на классе $M(X)$ невозрастающих функций, т.е. для функции $f\in M$ норма $\Gamma(f)<\infty\Leftrightarrow\sigma(f)<\infty$ и существует число $C>0$ такое, что $C^{-1}\sigma(f)\le\Gamma(f)\le C\sigma(f)$.

Так как функции $\mathbf{k}(t;f)$ и $\frac{1}{t}K(t;f)$ - невозрастающие, то в определениях $\mathbf{k}$ и K - методов симметричную норму σ можно заменить на квазисимметричную норму Γ, часто более простую.

Теорема 5.7.3/1. *Пусть* Ω *- квазисимметричная норма, обладающая свойством Фату, с индексами* $0<\beta\le\alpha<1$. *Тогда* $BL^{(1,0)}_{\Omega,\mathbf{k};Benn}$ *есть* $\mathbf{R}$*-пространство и*

$$f\in BL^{(1,0)}_{\Omega,\mathbf{k};Benn}\Leftrightarrow d_n(f)=\left\{\operatorname{dist}_{BMO}(f,\mathbf{R})\right\}_{n\ge0}\in\ell_{\Omega,\mathbf{k};Benn}.$$

В параграфе 5.8 рассматриваются пространства рациональной аппроксимации по норме пространства Харди H_p. Пусть A - пространство всех аналитических на $D=\{z:|z|<1\}$. Через H_p, при $0<p\le\infty$, обозначим пространство

$$H_p:=\left\{f\in A:\left\|f\,|H_p\right\|=\sup_{0<r<1}\left\|f(\cdot r)|L_p\right\|<\infty\right\},$$

где $\left\|\cdot|L_p\right\|$ - L_p норма на окружности $T=\{z:|z|=1\}$.

Для функции $f\in H_p$ и целого и положительного числа n обозначим через $r_n(f,H_p)$ приближение функции f в пространстве H_p рациональными функциями степени не выше $n-1$.

При $\alpha>0,0<p,q\le\infty$ обозначим через $R^{\alpha}_{p,q}$ аппроксимационное пространство функций $f\in H_p$ с квазинормой

$$\left\|f\,|R^{\alpha}_{p,q}\right\|=\left\|f\,|H_p\right\|+\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j\alpha}r_{2^j}(f,H_p)\right)^q\right\}^{1/q};$$

$$\left\| f \left| R^{\alpha}_{p,\infty} \right\| = \right\| f \left| H_p \right\| + \sup_j \left(2^{j\alpha} r_{2^j}\left(f, H_p \right) \right)^q .$$

Как показал А.А.Пекарский[5], пространство рациональной аппроксимации $R^{\alpha}_{p,\sigma}$ совпадает с пространством A^{α}_{σ} при $\alpha, \sigma > 0, 1 < p < \infty$ и $\sigma = \left(\alpha + p^{-1}\right)^{-1}$. Можно заметить, что этот результат характеризует пространства $R^{\alpha}_{p,\sigma}$ не при любом значении второго нижнего индекса $q \in \left(0, \infty\right|$, а только при условии $q = \sigma = \left(\alpha + p^{-1}\right)^{-1}$. Используя интерполяцию, от этого ограничения удалось отказаться.

Теорема 5.8. *Пусть* $0 < \alpha, q < \infty, 1 < p < \infty, \alpha = 1/\sigma - 1/p$. *Тогда* $R^{\alpha}_{p,q} = AL^{(1,-1/p)}_{\sigma,q}$.

В параграфе 5.9 рассматриваются пространства рациональной аппроксимации по норме L_{∞}. Рассмотрим числа $d_n\left(f, T\right) = \inf\left\{ \left\| f - r \left| L_{\infty}\left(T\right) \right\|, r \in R_n\left(T\right) \right.\right\}$.

Аппроксимационным пространством $R^{\alpha}_{\infty,q}$ $\left(\alpha > 0, 0 < q \le \infty\right)$ назовем множество непрерывных на T функций, для которых конечны квазинормы

$$\left\| f \left| R^{\alpha}_{\infty,q}\left(T\right) \right\| = \right\| f \left| L_{\infty}\left(T\right) \right\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j\alpha} \cdot d_{2^j}\left(f, T\right) \right)^q \right)^{1/q}$$

при $q \ne \infty$ и

$$\left\| f \left| R^{\alpha}_{\infty,\infty}\left(T\right) \right\| = \right\| f \left| L_{\infty}\left(T\right) \right\| + \sup_j 2^{j\alpha} d_{2^j}\left(f, T\right)$$

В статье А.А.Пекарского[7] показано, что

$$R^{\alpha}_{\infty,1/\alpha} = B^{\alpha}_{1/\alpha}, \ \left(\alpha > 1\right).$$

Здесь получено описание аппроксимационных пространств $R^{\alpha}_{\infty,q}$, при условии $q = 1/\alpha$, т.е. для данного значения α мы получаем ответ только при одном значении q. Этот результат можно усилить с помощью интерполяции

Теорема 5.9. *Если* $0 < \alpha < 1, 0 < q \le \infty$, *то* $R^{\alpha}_{\infty,q} = BL^{(1,0)}_{1/\alpha,q}$.

Таким образом, мы получили ответ при произвольном значении q.

Полученные результаты можно упростить с помощью описаний интерполяционных норм полученных в параграфе 4.3.

Это является содержанием параграфа 5.10.

Теорема 5.10/1. *Пусть* $1<\sigma<\infty, 0<\alpha<1-1/\sigma, 1\le q\le\infty$. *Тогда аналитическая функция* $f\in\mathbf{D}_+{}'$ *принадлежит аппроксимационному пространству* $R_{\sigma,q}^{\alpha}=AL_{\sigma,q}^{(1,-1/p)}$ *тогда и только тогда, когда*
$f'\in L_{\sigma,q}\left(D,(1-|z|)^{1+1/p},(1-|z|)^{-2}m_2\right)\cap\mathbf{D}_+{}'$.

Здесь производная берется от продолжения функции f на открытый круг D.

Рассмотрим пространства рациональной аппроксимации по норме BMO. Из результатов В.В.Пеллера[32,3] (Теор. А) следует, что $\{r_n(f)\}\in\ell_p\left(n^{1/p-1/q}\right)$
тогда и только тогда, когда $f\in\left(A_{p_0}^{1/p_0}, A_{p_1}^{1/p_1}\right)_{\theta,q}$, где $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$.

Теорема 5.10/2. *Пусть* $1<p<\infty, 1\le q\le\infty, f$ - *аналитическая функция. Последовательность* $\{r_n(f)\}\in\ell_p\left(n^{1/p-1/q}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $f\in A_{p,q}^{(1,0)}$ *или* $f'\in L_{p,q}\left(D,(1-|z|),(1-|z|)^{-2}m_2\right)$.

Положения, выносимые на защиту

1) Решение задачи интерполяции пространств Бесова $B_p^s(R_n)$ и Лизоркина-Трибеля $F_p^s(R_n)$ в общем «недиагональном» случае.

2) Получение интерполяционных утверждений для пространств Бесова с участием пространств BMO, Гельдера-Зигмунда, L_∞.

3) Реализация в классах пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля многомерных интерполяционных методов Спарра и «покоординатной» интерполяции. Доказательство интерполяционных теорем, использующие слабые условия вида $T:F_{p,1,1}^s\to F_{\tilde p,\infty,\infty}^{\tilde s}$ и $T:B_{p,1,1}^s\to B_{\tilde p,\infty,\infty}^{\tilde s}$.

4) Решение проблемы внутреннего описания интерполяционной нормы на области с сильным условием конуса (теорема 4.2.2/2).

5) Получение новых классов пространств рациональной аппроксимации (по нормам пространств BMO, H_p и L_∞).

[32] Пеллер В.В. Операторы Ганкеля класса σ_p и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) / В.В.Пеллер // Матем. сб.– 1980.– Т. 113.– №4.– С.538-581.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Крепкогорский В.Л. Пространства функций, допускающие описание в терминах рациональной аппроксимации в норме BMO / В.Л.Крепкогорский // Изв. вузов. Математика 1988. – №10. – С.23 – 30.

[2] Крепкогорский В.Л. Пространства интерполяционные относительно пространств Бесова / В.Л.Крепкогорский // Изв. вузов. Математика. 1989. – №11. – С.85 – 87.

[3] Пространства рациональной аппроксимации по норме H_p / В.Л.Крепкогорский // Деп. В ВИНИТИ 03.11.89 Ред. ж. Изв. Вузов. Матем. –1989. –№.6701–В89.- 10с.

[4] Крепкогорский В.Л. Квазинормированные пространства функций, рациональной аппроксимации в норме BMO / В.Л.Крепкогорский // Изв. вузов. Математика 1990. – №3. – С.38 – 44.

[5] Крепкогорский В.Л. Интерполяция в пространствах Лизоркина-Трибеля и Бесова / В.Л.Крепкогорский // Матем. сб. –1994. –Т.185. – №7. – С.63 - 76.

[6] Крепкогорский В.Л. Интерполяция с функциональным параметром в классе пространств Бесова / В.Л.Крепкогорский // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №6. – С.54 – 62.

[7] Крепкогорский В.Л. Интерполяция и теоремы вложения для квазинормированных пространств Бесова / В.Л.Крепкогорский // Изв. вузов. Математика. – 1999. – №7. – С.23 – 29.

[8] Крепкогорский В.Л. О многомерных методах интерполяции / В.Л.Крепкогорский // Изв. вузов. Математика. – 1999. – №11. – С.41 – 49.

[9] Крепкогорский В.Л. Пространства рациональной аппроксимации по чебышевской норме / В.Л.Крепкогорский // Тезисы конферен. "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" Казань. – 1999. – С.130 – 131.

[10] Крепкогорский В.Л. Интерполяция в классе пространств гладких функций. Чебышевская рациональная аппроксимация на окружности. / В.Л.Крепкогорский // Алгебра и анализ. – 2000. – Т.12– вып.5 – С. 128 – 141.

[11] Крепкогорский В.Л. Интерполяция в классе пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля. Предельный случай $p_0 = \infty$. / В.Л.Крепкогорский // Известия вузов. Математика. – 2000. – №5. – С.72–74.

[12] Крепкогорский В.Л. Интерполяционные нормы для пространств Бесова, определенные с помощью модуля непрерывности. / В.Л.Крепкогорский // Труды Математического центра имени

Н.И.Лобачевского. Т.5. Материалы Международной научной конференции. – Казань, – 2000. – С.121-122.
[13] Крепкогорский В.Л. Реализация интерполяционного метода Спарра в классах пространств гладких функций. /В.Л.Крепкогорский // Математические заметки. – 2001. – Т.70 – вып.4. – С. 581–590.
[14] Крепкогорский В.Л. Внутреннее описание интерполяционной нормы BL на плоскости. /В.Л.Крепкогорский // Ульяновский гос. педагогический ун-т. Материалы международной конференции по теории операторов и ее приложениям, посвященной памяти А.В.Штрауса. – Ульяновск, 2001г. – С.25.
[15] Крепкогорский В.Л. Метод Спарра в пространствах Бесова. / В.Л.Крепкогорский // Материалы конференции по функциональному анализу. – Казанский гос. ун-т, Казань, – 2001 – С.130–131.
[16] Крепкогорский В.Л. Интерполяция пространств Бесова. Нормы, заданные с помощью модуля непрерывности. /В.Л.Крепкогорский // Известия вузов. Математика. – 2002. № 1. – С. 76 – 78.
[17] Крепкогорский В.Л. Дифференциально-разностная характеристика пространств рациональной аппроксимации на окружности /В.Л.Крепкогорский // Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 27 июня – 4 июля 2003 г.)//Казанский гос. ун-т, Казань, – 2003г. – С.134 – 135.
[18] Крепкогорский В.Л. Пространства рациональной аппроксимации, полученные с помощью интерполяции пространств Бесова A_p^s /В.Л.Крепкогорский // Материалы международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ» посвященной столетию Сергея Михайловича Никольского (Москва 23 мая - 28 мая 2005 г.)//МИАН им. Стеклова, Москва, – 2005г. – С.137.
[19] Крепкогорский В.Л. Интерполяция пространств рациональной аппроксимации, принадлежащих к классу Бесова. /В.Л.Крепкогорский // Математические заметки. –2005. – Т.77– вып.6. – С. 877–885.
[20] Крепкогорский В.Л. Интерполяция пространств Бесова на области. /В.Л.Крепкогорский // «Современные методы теории функций и смежные проблемы»: Материалы Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 2007г.) // ВГУ, - 2007г. – С.114-115.